*Duo*limpiadi

Antichi problemi

Soluzioni

1. Il gioco dei Parti

> Vachagan (il Coraggioso) e Shapur (figlio di Pabag) fanno un gioco: scrivono il numero 2 su una lavagna, e poi a turno, partendo da Vachagan, cancellano il numero n e scrivono $n + p$, dove p è un divisore primo di n. Perde il gioco la prima persona che scrive sulla lavagna un numero maggiore di 69. Supponendo che entrambi i giocatori giochino perfettamente, si determini chi vincerà il gioco.

Vince **Vachagan**.

Definizioni

> *Definizione*
> Chiamiamo n *perdente* se la persona che trova n sulla lavagna finirà a perdere.

> *Definizione*
> Chiamiamo n *vincente* se la persona che trova n sulla lavagna finirà a vincere.

> *Lemma 1*
> Qualsiasi n è vincente xor perdente.

Soluzione 1

Si nota che le prime due mosse sono forzate: Vachagan scriverà 4 e Shapur scriverà 6.

Consideriamo due casi:

1. 12 *è perdente*. Allora Vachagan scriverà 8, forzando Shapur a scrivere 10, allora Vachagan scriverà 12, e visto che 12 è perdente e tocca a Shapur allora Vachagan vince.
2. 12 *è vincente*. Allora Vachagan scriverà 9, forzando Shapur a scrivere 12, e visto che 12 è vincente e tocca a Vachagan allora Vachagan vince.

Dunque per il Lemma 1 Vachagan vince. ■

Soluzione 2

> *Lemma 2a*
> Se posso cancellare n e scrivere $n + p$, e $n + p$ è perdente, allora n è vincente.

> *Lemma 2b*
> Se cancellando n, tutti i p possibili portano a $n + p$ vincenti, allora n è perdente.

Possiamo dunque ragionare a ritroso, partendo da numeri che conosciamo essere vincenti o perdenti e guardando i numeri che arrivano in numeri di una certa qualità per dedurne la qualità opposta.

- Tutti i numeri ꞔ > 69 sono vincenti, dato che la persona che ha scritto ꞔ ha sicuramente perso.
- 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 65, 67, 68, 69 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a un numero maggiore di 69.
- 46, 51, 52, 60, 66 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a 65, 68 o 69, numeri perdenti.
- 23, 55, 57, 58, 63, 64 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 29, 38, 44, 50, 54, 56, 62 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a uno tra vari numeri perdenti.
- 19, 31, 48, 49 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 42, 45, 46 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a 48 o 49, numeri perdenti.
- 23, 39, 40 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 26, 35, 36 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a 39 o 40, numeri perdenti.
- 13, 33, 34 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 17, 22, 30, 32 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a 33 o 34, numeri perdenti.
- 11, 25, 27, 28 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 20, 21, 22, 24, 26 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a 25, 27 o 28, numeri perdenti.
- 13 e 18 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 15 e 16 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a 18, numero perdente.
- 14 è perdente perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 7 e 12 sono vincenti perchè esiste una mossa che porta a 14, numero perdente.
- 9 e 10 sono perdenti perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 5, 6, 8 sono numeri vincenti perchè esiste una mossa che porta a 10, numero vincente.
- 4 è perdente perchè tutte le mosse portano a numeri vincenti.
- 2 è vincente perchè esiste una mossa che porta a 4, numero perdente.

Dunque la persona che trova 2 vince. Vachagan trova 2 all'inizio del gioco, e dunque Vachagan vince. ■

Marking scheme

Osservazioni generali

- **0 punti** se si dice che Vachagan vince
- **0 punti** se si dice qualcosa come «Vachagan vince se e solo se 2 è vincente» o «Vachagan vince se e solo se 4 è perdente»
- **0 punti** se si osserva che non è possibile scrivere numeri primi
- **−1 punti** per una soluzione completa che non dice esplicitamente chi vince (dichiarazioni del tipo «vince il primo giocatore» sono accettate)

Soluzione 1

- **1 punto** se si osserva che Vachagan scriverà sempre 6
- **2 punti** se si svolge il caso in cui 12 è vincente
- **2 punti** se si svolge il caso in cui 12 è perdente
- **5 punti** se si trae la conclusione

Stessi punteggi valgono nel caso il ragionamento venga fatto partendo da un numero diverso da 12.

Soluzione 2

- **1 punto** se si osserva il Lemma 2a (dimostrazione non necessaria)
- **1 punto** se si osserva il Lemma 2b (dimostrazione non necessaria)
- **1 punto** se si dimostra che 65, 68 e 69 sono perdenti, e si imposta il ragionamento al contrario
- **2 punti** se si dimostra che 46, 51, 52, 60 e 66 sono vincenti
- **5 punti** se si dimostra che 2 è vincente

2. Il cubo dell'imperatore Maurya

> Siano $\text{ꓘ}, \square, \Lambda \in \mathbb{Z}^+$ per cui $\frac{\text{ꓘ}}{\square} + \frac{\square}{\Lambda} + \frac{\Lambda}{\text{ꓘ}} \in \mathbb{Z}$. Si dimostri che $\text{ꓘ}\square\Lambda$ è un cubo perfetto.

Definizioni

Definizione
Sia $\nu_p(n)$, per p primo e $n \in \mathbb{Z}^+$, il numero di volte in cui p appare nella fattorizzazione prima di n.

Definizione
Sia $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right)$, per p primo e $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $\nu_p(a) - \nu_p(b)$.

Lemma 1
$\nu_p(x + y) \geq \min(\nu_p(x), \nu_p(y))$, e in particolare $\nu_p(x + y) = \min(\nu_p(x), \nu_p(y))$ se $\nu_p(x) \neq \nu_p(y)$

Soluzione 1

Sia p un primo qualsiasi.

■ Si nota che la tesi è equivalente a dimostrare che $3 \mid \nu_p(\text{ꓘ}) + \nu_p(\square) + \nu_p(\Lambda)$.

Siano

$$x := \nu_p\left(\frac{\text{ꓘ}}{\square}\right)$$
$$y := \nu_p\left(\frac{\square}{\Lambda}\right)$$
$$z := \nu_p\left(\frac{\Lambda}{\text{ꓘ}}\right)$$

● È ovvio che $x + y + z = 0$.

★ Se $x = y = z = 0$, la tesi è ovvia.

Applicando il Lemma 1, vogliamo che

$$\nu_p\left(\frac{\text{ꓘ}}{\square} + \frac{\square}{\Lambda} + \frac{\Lambda}{\text{ꓘ}}\right) \geq 0$$

Per ★, almeno uno tra x, y e z è positivo. Per il Lemma 1, esattamente uno tra loro è positivo, o il minimo sarebbe negativo. Senza perdita di generalità supponiamo $x > 0$.

Per evitare il caso di uguaglianza del Lemma 1, $y = z$. Allora per ● $x = -2y$.

$$
\begin{aligned}
y &= z \\
\nu_p\left(\frac{\square}{\Lambda}\right) &= \nu_p\left(\frac{\Lambda}{ꓘ}\right) \\
\nu_p(\square) - \nu_p(\Lambda) &= \nu_p(\Lambda) - \nu_p(ꓘ) \\
2\nu_p(\Lambda) &= \nu_p(ꓘ) + \nu_p(\square) \\
3\nu_p(\Lambda) &= \nu_p(ꓘ) + \nu_p(\square) + \nu_p(\Lambda) \\
3 &\mid 3\nu_p(\Lambda) \\
\therefore 3 &\mid \nu_p(ꓘ) + \nu_p(\square) + \nu_p(\Lambda)
\end{aligned}
$$

Dunque per ■ la tesi è dimostrata. ■

Soluzione 2

Sia p un primo qualsiasi.

⬟ Per il Lemma 1, se $x + y \in \mathbb{Z}$, allora $\nu_p(x), \nu_p(y) \geq 0$ oppure $\nu_p(x) = \nu_p(y)$.

Siano

$$
\begin{aligned}
\alpha &:= \nu_p(ꓘ) \\
\beta &:= \nu_p(\square) \\
\gamma &:= \nu_p(\Lambda)
\end{aligned}
$$

Senza perdita di generalità, $\max(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha$.

Se $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, e quindi $\alpha - \beta \geq 0; \beta - \gamma \geq 0; \gamma - \alpha \leq 0$, allora per ⬟ $\gamma - \alpha = 0$ e dunque $\gamma = \alpha$. Allora $\nu_p(ꓘ) = \nu_p(\square) = \nu_p(\Lambda)$. Dividiamo $ꓘ, \square, \Lambda$ per p^α. Si procede così fino a quando avremo $ꓘ', \square', \Lambda'$ per cui tutti i p avranno il caso in cui $\alpha \geq \gamma \geq \beta$.

Ma allora $\alpha - \beta \geq 0, \beta - \gamma \leq 0, \gamma - \alpha \leq 0$, e quindi per ⬟ $\beta - \gamma = \gamma - \alpha$; in particolare α, γ, β formano una successione aritmetica, e quindi $p^\alpha, p^\gamma, p^\beta$ formano una successione geometrica. Sapendo che per tutti i p possibili vale questa cosa, allora anche $ꓘ, \Lambda, \square$ formano una successione geometrica:

$$
\begin{aligned}
ꓘ &= \Lambda^{1+\delta} \\
\Lambda &= \Lambda^1 \\
\square &= \Lambda^{1-\delta}
\end{aligned}
$$

La tesi è a questo punto ovvia. ■

Soluzione 3

◆ Assumiamo senza perdita di generalità che $\gcd(ꓘ, \square, \Lambda) = 1$, infatti è chiaro che $\frac{ꓘ}{\square} + \frac{\square}{\Lambda} + \frac{\Lambda}{ꓘ} \in \mathbb{Z}$ se e solo se $\frac{ꓘ/g}{\square/g} + \frac{\square/g}{\Lambda/g} + \frac{\Lambda/g}{ꓘ/g} \in \mathbb{Z}$ e $ꓘ\square\Lambda$ cubo se e solo se $\frac{ꓘ}{g}\frac{\square}{g}\frac{\Lambda}{g}$ cubo (dove $g := \gcd(ꓘ, \square, \Lambda)$).

Notiamo che

$$
\frac{ꓘ}{\square} + \frac{\square}{\Lambda} + \frac{\Lambda}{ꓘ} = \frac{ꓘ^2\square + \square^2\Lambda + \Lambda^2ꓘ}{ꓘ\square\Lambda}
$$

e dunque $ꓘ\square\Lambda \mid ꓘ^2\square + \square^2\Lambda + \Lambda^2ꓘ$.

Sia p un primo che divide $ꓘ\square\Lambda$. Senza perdita di generalità, $p \mid ꓘ$.

$$
\begin{aligned}
p &\mid \text{ꓘ}^2\square + \square^2\Lambda + \Lambda^2\text{ꓘ} \\
\therefore p &\mid \square^2\Lambda \\
\therefore p &\mid \square \vee p \mid \Lambda
\end{aligned}
$$

Per ◆, $\gcd(\text{ꓘ}, \square, \Lambda) = 1$, e quindi $p \mid \square \wedge p \nmid \Lambda$ oppure $p \nmid \square \wedge p \mid \Lambda$.

Se $p \mid \square$, allora siano $\alpha \coloneqq \nu_p(\text{ꓘ})$ e $\beta \coloneqq \nu_p(\square)$ (notiamo che $\nu_p(\Lambda) = 0$ e $\nu_p(\square) > 0$). Ora, $p^{\alpha+\beta} \mid \text{ꓘ}\square\Lambda$, e quindi $p^{\alpha+\beta} \mid \text{ꓘ}^2\square + \square^2\Lambda + \Lambda^2\text{ꓘ}$, e quindi $p^{\alpha+\beta} \mid \square^2\Lambda + \Lambda^2\text{ꓘ}$. Vogliamo dimostrare che $\alpha = 2\beta$. Procedendo alla ricerca di un assurdo, supponiamo che $\alpha \neq 2\beta$. Per il Lemma 1, $\nu_p(\square^2\Lambda + \Lambda^2\text{ꓘ}) = \nu_p(\square^2 + \text{ꓘ}) = \min(2\beta, \alpha)$. Ma $\min(2\beta, \alpha) \leq \alpha < \alpha + \beta$, $\rightarrow\!\times\!\leftarrow$. Dunque $\alpha = 2\beta$ e quindi $\nu_p(\text{ꓘ}\square\Lambda) = 3\beta$, e in particolare $3 \mid \nu_p(\text{ꓘ}\square\Lambda)$.

Similmente, se $p \mid \Lambda$, $\alpha \coloneqq \nu_p(\text{ꓘ}); \gamma \coloneqq \nu_p(\Lambda) > 0; \nu_p(\square) = 0$. $p^{\alpha+\gamma} \mid \text{ꓘ}\square\Lambda$, $p^{\alpha+\gamma} \mid \text{ꓘ}^2\square + \square^2\Lambda$, dimostriamo $\gamma = 2\alpha$ per assurdo. Per il Lemma 1, $\nu_p(\text{ꓘ}^2 + \Lambda) \leq \min(2\alpha, \gamma) \leq \gamma < \alpha + \gamma$ $\rightarrow\!\times\!\leftarrow$. $\gamma = 2\alpha$, $\nu_p(\text{ꓘ}\square\Lambda) = 3\alpha$, $3 \mid \nu_p(\text{ꓘ}\square\Lambda)$

Ma quindi in entrambi i casi ꓘ□Λ ha un numero divisibile per tre di fattori p, ma questo vale per tutti i p che dividono ꓘ□Λ, e dunque ꓘ□Λ è un cubo. ■

Marking scheme

Osservazioni generali

- **0 punti** se si dimostra (erroneamente) che l'ipotesi è vera solo se $\text{ꓘ} = \text{□} = \text{Λ}$

Soluzione 1

- **1 punto** se si riformula la tesi nella forma $3 \mid \nu_p(\text{ꓘ}) + \nu_p(\text{□}) + \nu_p(\text{Λ})$
- **1 punto** se si riformula l'ipotesi in $\nu_p\left(\frac{\text{ꓘ}}{\text{□}} + \frac{\text{□}}{\text{Λ}} + \frac{\text{Λ}}{\text{ꓘ}}\right) \geq 0$
- **1 punto** se si osserva che $x + y + z = 0$
- **0 punti** se si risolve il caso $x = y = z = 0$
- **1 punto** se si enuncia (senza dimostrazione) che solo uno tra x, y, z è positivo
- **2 punti** se si dimostra correttamente l'enunciato
- **1 punto** se si enuncia (senza dimostrazione) che $y = z$
- **2 punti** se si dimostra correttamente l'enunciato
- **1 punto** se si conclude

Soluzione 2

- **0 punti** se si riduce il problema al caso $\max(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha$
- **1 punto** se si riduce il problema ai due casi $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ e $\alpha \geq \gamma \geq \beta$.
- **1 punto** se si risolve il primo caso
- **3 punti** se si riduce il problema a avere solo secondi casi
- **2 punti** se si arriva nel secondo caso a dire che $\beta - \gamma = \gamma - \alpha$
- **2 punti** se si conclude il secondo caso
- **1 punto** se si conclude il problema

Soluzione 3

- **1 punto** se si riduce il problema al caso in cui $\gcd(\text{ꓘ}, \text{□}, \text{Λ}) = 1$
- **1 punto** se si dimostra che $p \mid \text{□} \Leftrightarrow p \nmid \text{Λ}$ e si analizzano i due casi
- **1 punto** se si enuncia (senza dimostrazione) che $\alpha = 2\beta$
- **5 punti** se si dimostra che $\alpha = 2\beta$
- **1 punto** se si conclude che $3 \mid \nu_p(\text{ꓘ□Λ})$
- **0 punti** se si dimostra il secondo caso similmente
- **1 punto** se si conclude

3. La griglia micenea

> Determina tutti gli $☥ \in \mathbb{Z}^+$ i cui divisori possono essere inseriti in una griglia rettangolare, ciascun divisore in esattamente una casella, in cui:
> - la differenza in valore assoluto tra le somme di due righe qualsiasi è al massimo 1
> - la differenza in valore assoluto tra le somme di due colonne qualsiasi è al massimo 1

Gli unici $☥$ possibili sono 1 e 2.

È chiaro che questi due casi funzionano, si dimostra che sono gli unici.

Supponiamo che la griglia sia di misure $a \times b$, con $a \geq b$ senza perdita di generalità.

> *Lemma 1*
> n ha al massimo $k-1$ divisori maggiori di $\frac{n}{k}$
> *Dimostrazione*
> Per ogni divisore $d \mid n$ esiste $\frac{n}{d}$ che sicuramente divide n. Ci sono al massimo $d-1$ divisori di n che sono minori di d, e dunque $d-1$ divisori maggiori di $\frac{n}{d}$. Segue la tesi. ■

Dato che ci sono $a > b-1$ righe, almeno una avrà solo termini minori o uguali di $\frac{☥}{b}$ (per cassetti applicando il Lemma 1 con $n = ☥$ e $k = b$). Ogni riga ha b elementi, e quella riga ha dunque al massimo una casella uguale a $\frac{☥}{b}$ e tutte le altre al massimo $\frac{☥}{b} - 1$, dunque un totale di $\frac{☥}{b} + (b-1)\left(\frac{☥}{b} - 1\right)$, che per $b > 1$ è minore o uguale a $☥ - 1$. Ma se $b > 1$, allora la riga che contiene $☥$ ha sicuramente somma maggiore o uguale di $☥ + 1$.
$|(☥ + 1) - (☥ - 1)| > 1 \rightarrow\leftarrow$.

Allora $b = 1$, e quindi c'è una sola colonna. Ogni riga avrà allora somma uguale all'unico numero contenuto, e quindi la riga che contiene 1 e la riga che contene $☥$ devono avere differenza massima di 1, e quindi $☥ \leq 2$.

Marking scheme

- **1 punto** se si enuncia, senza dimostrazione, che le uniche soluzioni sono $☥ \in \{1, 2\}$
- **2 punti** se si dimostra che ci sono al massimo $k-1$ divisori maggiori di $\frac{n}{k}$ (o dimostrazioni che considerano solo il caso particolare $n = ☥$ e $k = b$)
- **1 punto** se dimostra che esiste una riga che contiene solo numeri minori o uguali a $\frac{☥}{b}$
- **4 punti** se si dimostra che la somma di ogni riga è al massimo $☥ + 1$
- **1 punto** se si dimostra che $b = 1$
- **1 punto** se si conclude

4. La funzione fenicia

> Sia $𐤊 \in \mathbb{Z}^+$ fissato. Determina al variare di $𐤊$ tutte le funzioni $𐤐 : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ per cui, per ogni $𐤍 \in \mathbb{Z}^+$
> - $𐤐(𐤍) < 𐤐(𐤍 + 1)$
> - $𐤐^{𐤊}(𐤍) = (𐤊 + 1)𐤍$, dove $𐤐^{𐤊}$ indica l'applicazione di $𐤐$ ripetuta $𐤊$ volte.

La soluzione è della forma

$$𐤐(𐤍) = \begin{cases} 𐤍 + (𐤊 + 1)^{𐤃} & \text{, se } (𐤊 + 1)^{𐤃} \leq 𐤍 < 𐤊(𐤊 + 1)^{𐤃} \\ 𐤊(𐤍 - (𐤊 + 1)(𐤊 + 1)^{𐤃}) & \text{, se } 𐤊(𐤊 + 1)^{𐤃} \leq 𐤍 < (𐤊 + 1)^{𐤃 + 1} \end{cases}$$

Se $0 \leq s \leq (𐤊 + 1)^{\ell}$, allora l'ultima condizione può essere scritta come $𐤐\big(𐤊(𐤊 + 1)^{\ell} + s\big) = (𐤊 + 1)\big((𐤊 + 1)^{\ell} + s\big)$, ovvero $𐤐(𐤍)$ applica il seguente procedimento:
- scrivi $𐤍$ in base $𐤊 + 1$
- se la prima cifra è diversa da $𐤊$, aumentala di 1
- altrimenti rendi la prima cifra un 1 e aggiungi uno 0 alla fine

Interpretando la funzione in questo modo è chiaro che rispetti le condizioni, ora dimostriamo che è l'unica.

> *Lemma 1*
> Se f è una funzione strettamente crescente, e $f(a + k) = f(a) + k$, allora $f(a + c) = f(a) + c$ per ogni $0 \leq c \leq k$

> *Lemma 2*
> $𐤐(1) = 2$.
>
> *Dimostrazione*
> Per assurdo, se $𐤐(1) = 1$, allora $𐤐^{𐤊}(1) = 1 \neq 𐤊 + 1 \rightarrow\!\times\!\leftarrow$ oppure se $𐤐(1) > 2$ allora $𐤐(a) \geq a + 2$ (perchè $𐤐$ è strettamente crescente) e quindi $𐤐^{r}(a) \geq a + 2r$ e allora $𐤐^{𐤊}(1) \geq 1 + 2𐤊 \rightarrow\!\times\!\leftarrow$ $\blacksquare$

Troviamo una formula per $𐤐^{r}(1)$. Scriviamo $r = \ell𐤊 + \iota$ con $0 \leq \iota < 𐤊$. Dimostriamo che $𐤐^{\ell𐤊 + \iota}(1) = (𐤊 + 1)^{\ell}(\iota + 1)$. Applichiamo un'induzione su ℓ.

Caso base. Per il Lemma 2, $𐤐(1) = 2$ e quindi $𐤐(x) \geq x + 1$. $𐤊 + 1 = 𐤐^{𐤊}(1) \geq 𐤐(𐤊)$, e quindi $𐤐(𐤊) = 𐤊 + 1$. Per il Lemma 1, $𐤐^{\iota}(1) = \iota + 1$.

Passo induttivo.

$$𐤐^{(\ell+1)𐤊+\iota}(1) = 𐤐^{𐤊}\big(𐤐^{\ell𐤊+\iota}(1)\big) = (𐤊 + 1)𐤐^{\ell𐤊+\iota}(1) = (𐤊 + 1)(𐤊 + 1)^{\ell}(\iota + 1) = (𐤊 + 1)^{\ell+1}(\iota + 1) \; \blacksquare$$

Per $1 \leq \iota < 𐤊$,

$$(𐤊 + 1)^{\ell}(\iota + 1) = 𐤐^{\ell𐤊+\iota}(1) = 𐤐\big(𐤐^{\ell𐤊+\iota-1}(1)\big) = 𐤐\big((𐤊 + 1)^{\ell} \cdot \iota\big)$$
$$(𐤊 + 1)^{\ell}(\iota + 2) = 𐤐^{\ell𐤊+\iota+1}(1) = 𐤐\big(𐤐^{\ell𐤊+\iota}(1)\big) = 𐤐\big((𐤊 + 1)^{\ell}(\iota + 1)\big)$$

Ma allora per il Lemma 1, per ogni $(𐤊 + 1)^{\ell} \leq 𐤍 < 𐤊(𐤊 + 1)^{\ell}$, $𐤐(𐤍) = (𐤊 + 1)^{\ell}(\iota + 1)$.

Sia $0 \leq s < (𐤊 + 1)^{\ell}$.

$$(𐤊 + 1)\big((𐤊 + 1)^{\ell} + s\big) = 𐤐^{𐤊}\big((𐤊 + 1)^{\ell} + s\big) = 𐤐\big(𐤐^{𐤊-1}((𐤊 + 1)^{\ell} + s)\big) = 𐤐\big(𐤊(𐤊 + 1)^{\ell} + s\big)$$

Ma allora $ℸ(ɣ) = (ɏ + 1)\big(ɣ - (ɏ - 1)(ɏ + 1)^{\ell}\big)$ per ogni $ɏ(ɏ + 1)^{\ell} \leq ɣ < (ɏ + 1)^{\ell+1}$ ■

Marking scheme

- **0 punti** se si trovano valori specifici di $ℸ$
- **0 punti** se si trovano $ℸ$ in funzione di $ɏ$ specifici
- **1 punto** se si trovano le soluzioni
- **1 punto** se si dimostra che sono soluzioni valide, incluse dimostrazioni del tipo «chiaramente funzionano»
- **1 punto** se si trova $ℸ(1)$
- **2 punti** se si dimostra che $ℸ^{\ell ɏ + \iota}(1) = (ɏ + 1)^{\ell}(\iota + 1)$
- **3 punti** se si trova $ℸ(ɣ)$ nel caso $(ɏ + 1)^{٩} \leq ɣ < ɏ(ɏ + 1)^{٩}$
- **2 punti** se si trova $ℸ(ɣ)$ nel caso $ɏ(ɏ + 1)^{٩} \leq ɣ < (ɏ + 1)^{٩ + 1}$